

Iori, M. (2016). Conflitti semiotici e semantici nell'insegnamento-apprendimento della matematica. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *La matematica e la sua didattica - Convegno del trentennale*. Atti del Convegno Nazionale: *Incontri con la matematica*, n. 30, 4-5-6 novembre 2016, Castel San Pietro Terme (pp. 15–20). Bologna: Pitagora.

Conflitti semiotici e semantici nell'insegnamento-apprendimento della matematica

Maura Iori
NRD, Bologna

Abstract. *In teaching and learning mathematics, there are many situations where the signs used to designate some mathematical objects generate important semiotic and semantic conflicts in the students. They are conflicts which hinder the understanding of a large number of mathematical activities. In this paper, we propose to analyze some of these conflicts from a semio-cognitive point of view.*

1. Premessa

Sembra non esserci alcun conflitto nello studente che risponde con convinzione e sicurezza a una domanda dell'insegnante senza centrare la risposta; nello studente che preferisce usare regole o procedimenti che padroneggia con disinvoltura, anche se dispendiosi in termini di tempo e di energie; nello studente che applica regole o procedimenti utilizzati con successo in altre situazioni, simili per certi aspetti, ma che in quella data situazione risultano scorretti; nello studente che interpreta e usa termini specifici del linguaggio matematico, simboli, operazioni, espressioni, equazioni, enunciati, definizioni, teoremi, diagrammi, figure, grafici, ... in modo non appropriato o del tutto inatteso.

In generale non c'è conflitto nello studente. Lo studente ha i suoi “frames”, “micromondi”, o “campi di esperienza” coerenti in cui risolve un problema secondo la sua struttura cognitiva e regole appropriate. Se c'è un conflitto è prima di tutto un conflitto tra lo studente e il suo ambiente (con il problema, chi l'osserva, l'insegnante, ...). (Meissner, 1986, p. 7)¹

Il conflitto nasce da una situazione di forte interazione tra lo studente, l'insegnante e il Sapere – le componenti del *sistema didattico* (Chevallard, 1985) – senza escludere il mondo esterno, la società, i genitori, la comunità scientifica, etc. Può essere analizzato da tanti punti di vista (matematico, filosofico, psicologico, sociale, cognitivo, semiotico, etc.), a seconda degli specifici aspetti indagati. Il punto di vista sul quale baseremo la nostra analisi è quello *semio-cognitivo* (semiotico e cognitivo), che deriva dagli studi pionieristici di Duval (1988, 1993, 1995).

2. Conflitti semiotici e cognitivi

¹ Tutte le citazioni in italiano di autori non italiani sono traduzioni nostre.

Godino (2002) definisce un *conflitto semiotico* come “una disparità o discordanza tra i significati attribuiti a una medesima espressione da due soggetti (persone o istituzioni)” (par. III.1). Tale disparità o discordanza si manifesta quando l’allievo non dispone del *codice* (insieme di regole o convenzioni) necessario per interpretare l’espressione, ovvero del criterio necessario per stabilire la corrispondenza attesa tra *espressione* (significante) e *contenuto* (inteso come significato riconosciuto e accettato come tale entro una data istituzione); oppure quando l’insegnante non fornisce chiavi esplicite per l’attivazione del codice che permette di stabilire la corrispondenza attesa tra espressione e contenuto (Godino, 2002). La nozione di conflitto semiotico viene ulteriormente sviluppata da Godino, Font, Wilhelmi e Lurduy (2009) nei termini seguenti:

Se la disparità si produce tra i significati istituzionali, si parla di conflitto semiotico di tipo epistemico. Se la disparità si produce tra le pratiche che formano il significato personale di uno stesso soggetto, si parla di conflitto semiotico di tipo cognitivo. Quando la disparità si produce tra le pratiche (discorsive e operative) di due soggetti differenti in interazione comunicativa (per esempio, studente-studente, o studente-insegnante) si parla di conflitto (semiotico) interazionale. (Godino, Font, Wilhelmi, & Lurduy, 2009, p. 10)

Un conflitto semiotico di tipo *epistemico* deriva da una non congruenza tra le pratiche matematiche condivise entro due istituzioni differenti (per esempio: scuola e università, o due scuole); un conflitto semiotico di tipo *cognitivo* deriva da una non congruenza tra le pratiche matematiche specifiche di una persona (*pratiche personali*); mentre un conflitto semiotico di tipo *interazionale* deriva da una non congruenza tra le pratiche matematiche di due soggetti differenti. Ma se i soggetti in questione rappresentano due istituzioni differenti, il conflitto semiotico interazionale è anche epistemico. La distinzione tra conflitto semiotico cognitivo e conflitto semiotico interazionale evoca quella tra conflitto *interno* e conflitto *sociocognitivo* evidenziata da D’Amore (1999) in numerose situazioni di insegnamento-apprendimento:

Il conflitto cognitivo è un conflitto “interno” causato dalla non coincidenza tra due concetti, o tra due immagini o tra un’immagine ed un concetto, o tra un modello intuitivo che non corrisponde al modello matematico del concetto ed il modello matematico stesso (con la complicazione eventuale della nascita di modelli parassiti). In ogni caso, c’è una lotta tra il desiderio inconsapevole di tenere salda una immagine acquisita e nuove informazioni su un concetto che essa non riesce ad “inquadrare”. Ma il conflitto può anche essere sociale oltre che cognitivo. (...) non solo sul piano individuale “interno”, bensì pure sul piano sociale perché mette quello studente in conflitto con un modello che riteneva condiviso. (D’Amore, 1999, pp. 140–141)

In particolare, nel campo della geometria il conflitto cognitivo è causato dalla doppia natura, concettuale e figurale, attribuita da Fischbein (1993) alle figure geometriche:

Molti errori che gli studenti compiono nel loro ragionamento geometrico possono essere spiegati da questo tipo di scissione (o mancanza di congruenza) tra l'aspetto concettuale e quello figurale dei concetti figurali. La struttura figurale può dominare le dinamiche del ragionamento invece di essere controllata dai corrispondenti vincoli formali. (...) Immagini e concetti interagiscono nell'attività cognitiva di una persona (un bambino o un adulto) a volte cooperando altre volte entrando in conflitto. (Fischbein, 1993, pp. 160–161)

Questa scissione (o mancanza di congruenza) tra l'aspetto concettuale e quello figurale, ha, come vedremo, una natura prettamente semiotica e semantica, oltre che cognitiva.

3. Conflitti semiotici e semantici

Da un punto di vista semio-cognitivo, le difficoltà che gli studenti incontrano nelle attività matematiche hanno origine dal conflitto cognitivo generato da due opposte richieste: da una parte, la necessità di utilizzare rappresentazioni semiotiche di oggetti matematici (riconosciuti e accettati come tali entro una data istituzione) per svolgere una qualsiasi attività matematica; dall'altra, la necessità di non confondere il *contenuto* delle rappresentazioni semiotiche utilizzate con gli oggetti matematici rappresentati (Duval, 2006).² Ogni rappresentazione semiotica ha un contenuto che dipende più dal *registro semiotico* (Duval, 1993) utilizzato per produrla che dall'oggetto rappresentato; anzi, l'oggetto rappresentato diventa l'invariante di una molteplicità di rappresentazioni possibili (Duval, 2006). Di una rappresentazione semiotica R di un oggetto matematico si dovrebbe dunque sempre specificare (esplicitamente o implicitamente) il tipo di registro semiotico che la produce:

$$R = [\text{contenuto della rappresentazione, registro semiotico}]$$

senza identificare o confondere R con il suo contenuto. Anche perché vi sono rappresentazioni semiotiche in registri differenti, di un medesimo oggetto, che hanno lo stesso contenuto (per esempio: “1” nel sistema decimale e “1” nel sistema binario). D'altra parte, di un medesimo oggetto matematico ci sono diverse rappresentazioni semiotiche nei differenti registri semiotici (discorsivi o non discorsivi) utilizzati in matematica; ci sono cioè diverse rappresentazioni semiotiche *referenzialmente* equivalenti. La scelta della rappresentazione più efficace, o attesa dall'insegnante, in una data situazione risulta dunque tutt'altro che semplice e spontanea. Inoltre, del medesimo oggetto matematico le diverse rappresentazioni semiotiche non veicolano le stesse proprietà, le stesse caratteristiche. Ciò che ciascuna rappresentazione può esibire, rendere visibile, o stabilire esplicitamente è il proprio contenuto, che può essere completamente diverso da quello di altre rappresentazioni del medesimo oggetto. In altre parole, le diverse rappresentazioni semiotiche del medesimo oggetto matematico, pur essendo referenzialmente equivalenti,

² Alcune riflessioni storico-critiche sul paradosso cognitivo generato da tale conflitto si trovano in: D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Matteuzzi, 2013.

possono essere tra loro *non semanticamente congruenti* (cioè non “simili” per qualche aspetto). In tal caso, il costo cognitivo del passaggio dall’una all’altra risulta particolarmente elevato e importante. Per esempio, il grado di congruenza tra la rappresentazione di una retta, nel registro delle configurazioni geometriche, e le rappresentazioni dei numeri reali, nel registro della scrittura decimale, è estremamente basso (in entrambi i versi delle trasformazioni) per diverse ragioni. In particolare: (1) per le limitate possibilità di rappresentazione dei numeri reali nel registro della scrittura decimale; (2) per la problematicità della rappresentazione della nozione di “punto” nel registro delle configurazioni geometriche (Sbaragli, 2005); (3) per il carattere necessariamente discreto, non continuo, della rappresentazione di un insieme di punti nel registro delle configurazioni geometriche (Duval, 1988); (4) per la problematicità e la non univocità della corrispondenza semantica tra le unità di contenuto della rappresentazione della retta nel registro delle configurazioni geometriche e le unità di contenuto delle rappresentazioni dei numeri reali nel registro della scrittura decimale (la scelta dell’origine e dell’unità di misura sulla retta è arbitraria; le operazioni di misura per realizzare la corrispondenza non sono banali; a particolari rappresentazioni non semanticamente congruenti nel registro della scrittura decimale, come 1 e $0,\bar{9}$, corrisponde un solo punto della retta, etc.). L’equivalenza referenziale delle rappresentazioni corrispondenti nei due registri viene in realtà, di fatto, assunta come ipotesi: fissata un’origine e un’unità di misura, ad ogni punto della retta corrisponde uno ed un solo numero reale. D’altra parte, vi è congruenza semantica tra la rappresentazione di una retta con gli usuali segni grafici sovrapposti alla retta (che indicano le posizioni di alcuni punti) tra loro equidistanti e un sottoinsieme proprio dell’insieme dei numeri interi.

Come afferma Duval (1995), la relazione tra rappresentazioni semiotiche e oggetti rappresentati è una relazione di riferimento che risulta da un’operazione discorsiva intenzionale di designazione. Il funzionamento spontaneo del pensiero segue però la congruenza semantica, non l’equivalenza referenziale; e spesso lo studente fa della congruenza semantica la condizione necessaria e a volte sufficiente per l’equivalenza referenziale (Duval, 1988). Ma la congruenza semantica non assicura l’equivalenza referenziale, così come l’equivalenza referenziale non assicura la congruenza semantica. Per esempio: $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y = 1$ sono semanticamente congruenti, in quanto simili per certi aspetti, ma non referenzialmente equivalenti; $2 \cdot 3$, $\sqrt{36}$, $42/7$, $1+2+3$ sono referenzialmente equivalenti ma non semanticamente congruenti. Il mancato riconoscimento di un medesimo oggetto in rappresentazioni non semanticamente congruenti genera conflitti cognitivi che possono diventare così forti da disgregare l’oggetto matematico in questione, per far emergere due o più oggetti differenti, vincolati alle specifiche situazioni o ai singoli problemi affrontati. (Per gli esempi si rinvia a: Iori, 2015). Da quanto detto sopra, i conflitti che emergono da un’analisi semio-

cognitiva dei processi di insegnamento-apprendimento della matematica (*conflitti semio-cognitivi*) possono essere: (1) di natura prettamente semiotica, cioè conflitti generati da due rappresentazioni non semanticamente congruenti ma referenzialmente equivalenti (*conflitti semiotici*); (2) di natura prettamente semantica, cioè conflitti generati da due rappresentazioni semanticamente congruenti ma non referenzialmente equivalenti (*conflitti semantici*). In particolare, risultano *semantici* i conflitti generati da una rappresentazione *ambigua*, cioè che possa designare diversi oggetti. Risultano invece *semiotici* i conflitti generati dalla non coincidenza tra i contenuti di rappresentazioni che designano lo stesso oggetto. In ogni caso, i due tipi di conflitto, semiotico e semantico, sono strettamente legati l'uno all'altro. Consideriamo per esempio le seguenti rappresentazioni semiotiche:³

$R^1_1 = 0,74\bar{9}$, $R^1_2 = 0,75$ (nel registro r^1 della scrittura decimale);

$R^2_1 = 3/4$, $R^2_2 = 6/8$ (nel registro r^2 della scrittura frazionaria);

$R^3_1 = \frac{\bullet}{0} \quad \frac{\times}{1} \quad \frac{\times}{2} \quad \frac{\times}{3} \quad \frac{\times}{4} \quad \frac{\times}{5} \rightarrow$ (nel registro grafico r^3).

R^1_1 e R^1_2 hanno contenuti simili per certi aspetti, dunque un certo grado di congruenza, ma la loro equivalenza referenziale non è banale da dimostrare. D'altra parte, la non perfetta congruenza tra le unità di contenuto delle due rappresentazioni porta spontaneamente a identificare le due rappresentazioni con due oggetti differenti, generando conflitti di natura prettamente semiotica. Anche R^2_1 e R^2_2 hanno un certo grado di congruenza, ma la loro equivalenza referenziale risulta immediata; in questo caso, eventuali conflitti, di natura semiotica, possono emergere nella risoluzione di un problema che richieda la conversione di tali rappresentazioni dal registro della scrittura frazionaria al registro della lingua naturale nel quale è stato formulato il problema di partenza, e viceversa; oppure la conversione dal registro della scrittura frazionaria al registro della scrittura decimale, da R^2_1 o R^2_2 a R^1_2 . In ogni caso, si tratta di conflitti prettamente semiotici. R^2_1 e R^3_1 non sono semanticamente congruenti, e la loro equivalenza referenziale non è banale; lo si è visto, più in generale, anche sopra.

4. Conclusione

I conflitti semiotici e semantici che si manifestano nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica sono numerosi; sembrano inevitabili, ma possono essere previsti, riconosciuti, gestiti, controllati, circoscritti, superati con successo, se non evitati del tutto. Occorre però, da parte dell'insegnante: (1) una presa di coscienza della loro duplice natura, semiotica e semantica, inscindibile da quella cognitiva; (2) la progettazione di attività specifiche in aula per trasformare le possibili situazioni di conflitto semiotico e semantico in occasioni di confronto, approfondimento e

³ R^m_i = rappresentazione semiotica i -esima nel registro semiotico r^m ($i, m = 1, 2, 3, \dots$), secondo la notazione introdotta da D'Amore (2001).

discussione collettiva. Ma un'analisi semiotica e semantica dei conflitti cognitivi che si possono manifestare nell'insegnamento-apprendimento della matematica risulta necessaria non solo per interpretare quel che succede in aula, per organizzare e gestire in modo professionale le attività matematiche, ma anche nel processo di valutazione delle situazioni d'aula, in particolare nella valutazione dei processi di apprendimento degli studenti.

Bibliografia

- Chevallard, Y. (1985). *Transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
- D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, 15(2), 150–173.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2013). Alcune riflessioni storico-critiche sul cosiddetto “paradosso di Duval”. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 36B(3), 207–236.
- Duval, R. (1988). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1(1), 7–25.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. ULP, IREM Strasbourg, 5(1), 37–65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103–131.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139–162.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2-3), 237–284
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Lurduy, O. (2009). Sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos como herramientas para el análisis semiótico en educación matemática. *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics and Mathematics Education – 3rd Meeting* (pp. 1–22). Aristotle University of Thessaloniki. Retrieved from <http://www.ugr.es/~jgodino>
- Iori, M. (2015). *La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica* (Tesi di dottorato, Università di Palermo, Italia). Disponibile su <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Iori/Iori.htm>
- Meissner, H. (1986). Cognitive conflicts in mathematics learning. *European Journal of Psychology of Education*, 1(2), 7–15.
- Sbaragli, S. (2005). L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche: Il caso degli enti primitivi della geometria. *Bollettino del docenti di matematica*, 50, 69–76.

Parole chiave: conflitto semiotico; conflitto semantico; oggetti matematici; rappresentazioni semiotiche; analisi semio-cognitiva.